Quadratische Funktion

Die quadratische Polynom−Funktion $y = a\cdot x^2+b\cdot x+c$ setzt sich aus einem quadratischen x−Summand ($a\cdot x^2$) und einem linearen Teil ($b\cdot x+c$) zusammen.

Wir können auch bei dieser **Funktionenfamilie**, die das Bild einer **Parabel** wiedergibt, von 3 Erscheinungsformen ausgehen:

Funktionsterm – Tabelle – Graph

Wie sieht nun einen solche Funktion aus?

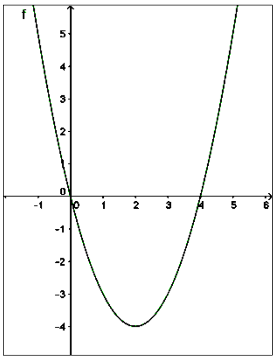
Beispiel 1: Gegeben ist der Funktionsterm einer Polynomfunktion 2.Grades:
f: $y = x^2-4x$
Gesucht:
a) Berechne die Wertetabelle und zeichne den Graph der Funktion im Intervall [−1;5]
b) Lies die Nullstellen und den Scheitelpunkt vom Graphen ab
c) Berechne die Nullstellen und den Scheitelpunkt

Lösung:

a) Wertetabelle:

x	−1	0	1	2	3	4	5
5	5	0	−3	−4	−3	0	5

Graph ==>



b) Nullstellen: $N_1(0|0)$ und $N_2(4|0)$. Scheitel: $S(2|-4)$

c) Berechnung mit der Mitternachtsformel: $f(x)=0 \rightarrow x^2 - 4x=0$

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot0}}{2\cdot1} = \frac{4\pm\sqrt{16-0}}{2} \rightarrow \mathbf{x_1 = 0 \text{ und } x_2 = 4}$$

damit kann man die Nullstellen angeben: **$N_1(0|0)$ und $N_2(4|0)$**

Lässt man in der Mitternachtsformel die Wurzel weg, so ergibt sich der x−Wert des Scheitels $\mathbf{x_S} = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2} = 2$.

Der y−Wert ergibt sich durch Einsetzen des x−Wertes in die Funktion:
$y = x^2-4x = 2^2-4\cdot2 = -4 \rightarrow$ **$S(2|-4)$**

Umkehraufgabe:
Ermittle aus angegebenen Punkten den Funktionsterm der Funktion
(Umgekehrte Kurvendiskussion = Funktionstermsuche = Steckbriefaufgabe)

Beispiel 2: Gegeben ist der Scheitelpunkt der Parabel $S(x_S|y_S) = (3|-6)$ und ein weiterer Punkt P(1|2)
Gesucht: Funktionsterm
a) in der Scheitelform $y = a\cdot(x-x_S)^2 + y_S$
b) in der allgemeinen (ausmultiplizierten) Form $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Lösung:

a) Wir setzen zuerst den Scheitelpunkt $S(3|-6)$ in die Scheitelform

$y = a\cdot(x-x_S)^2 + y_S$ ein:

➔ $y = a\cdot(x - 3)^2 + (-6)$ (GLG)

nun setzen wir den Punkt $P(1|2)$ für die allgemeinen x,y−Werte des Terms ein:

➔ $2 = a\cdot(1 - 3)^2 + (-6)$ ➔ daraus ergibt sich durch Gleichungsumformung:

➔ $8 = a\cdot (-2)^2$ ➔ $\mathbf{a = 2}$ ➔ setzt man a in die (GLG) ein, ergibt sich:

Ergebnis: $\mathbf{y = 2\cdot(x-3)^2 - 6}$

b) Wir müssen die Scheitelformgleichung nur einfach umformen, dann erhalten wir die allgemeine Form:

$y = 2\cdot(x-3)^2 - 6 = 2\cdot (x^2-6x+9) - 6 = 2x^2-12x+18 - 6 = 2x^2-12x+12$

Ergebnis: $\mathbf{y=2x^2-12x+12}$

Beispiel 3: Gegeben sind die Nullstellen $N_1(x_1|0)=(-2|0)$, $N_2(x_2|0)=(4|0)$ und ein weiterer Punkt $P(3|5)$ der Parabel

Gesucht: Funktionsterm

a) in der Nullstellenform $y = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$

b) in der allgemeinen (ausmultiplizierten) Form $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$

Lösung:

a) Wir setzen zuerst die Nullstellen $N_1(x_1|0)=(-2|0)$ und $N_2(x_2|0)=(4|0)$ in die Nullstellenform $y = a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ ein:

➔ $y = a\cdot(x - (-2))\cdot(x-4)$ (GLG)

nun setzen wir den Punkt $P(3|5)$ für die allgemeinen x,y−Werte des Terms ein:

➔ $5 = a\cdot(3- (-2))\cdot(3-4)$ ➔ daraus ergibt sich durch Gleichungsumformung:

➔ $5 = a\cdot5\cdot(-1)$ ➔ $\mathbf{a = -1}$ ➔ setzt man a in die (GLG) ein, ergibt sich:

Ergebnis: $\mathbf{y = -1\cdot(x+2)\cdot(x-4)}$

b) Wir müssen die Nullstellenform nur einfach umformen, dann erhalten wir die allgemeine Form:

$y = -1\cdot(x+2)\cdot(x-4) = -1\cdot(x^2+2x-4x-8) = -x^2+2x+8$

Ergebnis: $\mathbf{y = -x^2+2x+8}$

Übungsbeispiele:

1. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen im angegebenen Intervall mithilfe einer Wertetabelle und berechne die Nullstellen:
   a) $f(x) = x^2 - 2$ [-2; 2]
   b) $f(x) = x^2 - 4x$ [-1; 5]
   c) $f(x) = 2x^2 - 2x - 4$ [-2; 3]
   d) $f(x) = x^2/2 + 2x + 2$ [-5; 1]
   e) $f(x) = -x^2 + x + 1$ [-2; 3]
   f) $f(x) = -2x^2 - 3x -2$ [-3; 1]

2. Berechne bei den folgenden Parabeln die Koordinaten des Scheitels, die Schnittpunkte mit der x-Achse (Nullstellen) und skizziere die Parabeln!
   a) $y = x^2 - 6x + 11$
   b) $y = x^2 - 2x - 3$
   c) $y = x^2 + 4x + 3$
   d) $y = x^2 + 5x + 7$

3. Gegeben sind der Scheitelpunkt einer Parabel und ein weiterer Punkt. Gesucht ist der Funktionsterm der Parabel in der Scheitelform und der allgemeinen Form
   a) $S(2|-5)$ und $P(3|-4)$
   b) $S(-4|1)$ und $P(-3|3)$
   c) $S(4|3)$ und $P(3|6)$
   d) $S(-1|-3)$ und $P(-4|-21)$

4. Gegeben sind die Nullstellen und ein weiterer Punkt der Parabel
   Gesucht: Funktionsterm in der Nullstellenform und der allgemeinen Form
   a) $N1(2|0)$, $N2(6|0)$ und $P(1|5)$
   b) $N1(-2|0)$, $N2(4|0)$ und $P(1|-18)$
   c) $N1(-3|0)$, $N2(-1|0)$ und $P(1|-8)$
   d) $N1(4|0)$, $N2(-4|0)$ und $P(6|60)$

5) BIFIE−Beispiel:

Ein Wasserstrahl tritt aus einem Gartenschlauch aus.

a) Der Verlauf eines Wasserstrahls kann mit der folgenden Funktion beschrieben werden:

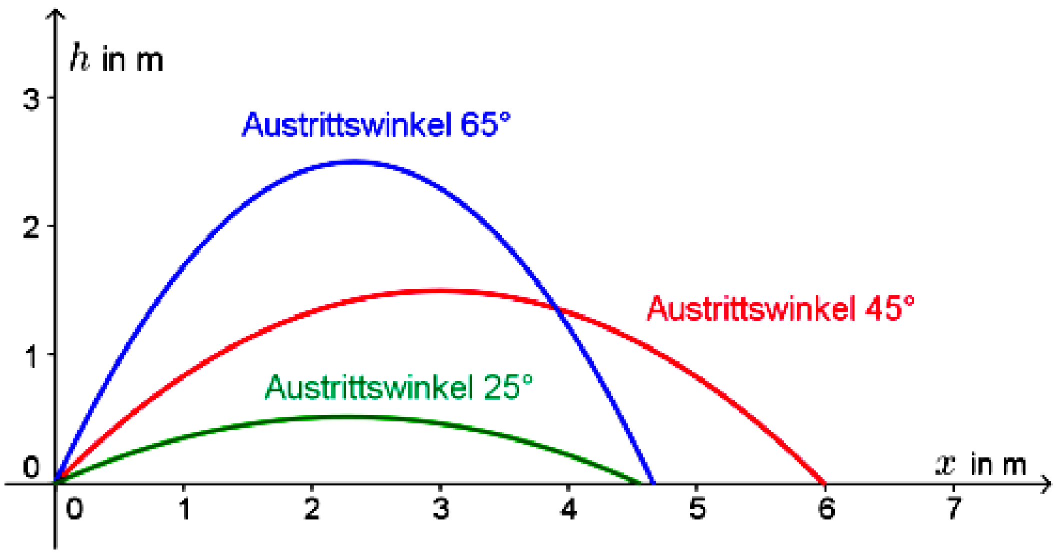
$$h(x) = -0{,}15x^2 + 0{,}9x + 0{,}6$$

$h(x)$ … Höhe des Strahls über einem Punkt am Boden in x Metern Entfernung vom Austrittsort in Metern (m)
x … horizontale Entfernung vom Austrittsort in Metern (m)

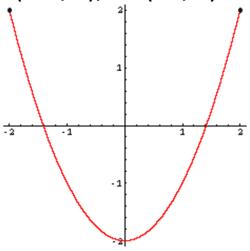
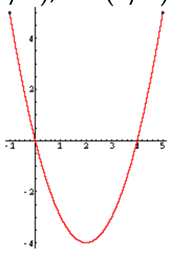
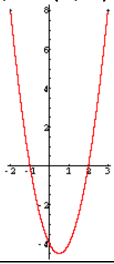
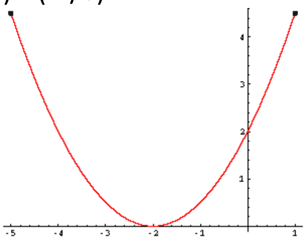
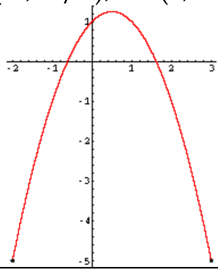
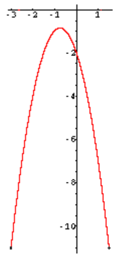
Berechnen Sie, in welcher horizontalen Entfernung x vom Austrittsort dieser Strahl auf dem Boden auftrifft. Argumentieren Sie, ob der Strahl in größerer Entfernung x auf dem Boden auftrifft, wenn man den Schlauch nur senkrecht nach oben verschiebt, ohne dabei die Strahlrichtung oder den Wasserdruck zu verändern.

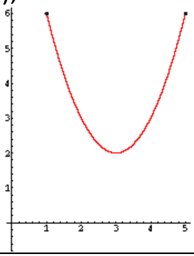
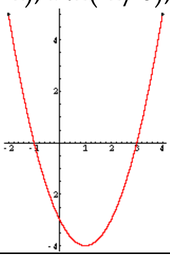
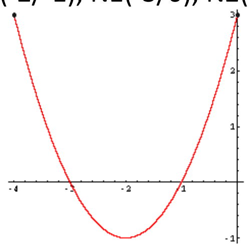
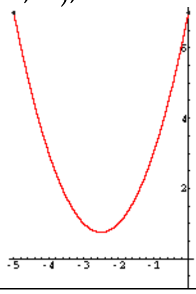
b) Ein Wasserstrahl tritt in einer Höhe von 1 m aus. Nach 3 m horizontaler Entfernung vom Austrittsort erreicht der Strahl eine maximale Höhe von 2,5 m.
Ermitteln Sie jene Polynomfunktion 2. Grades, welche die Höhe h des Wasserstrahls in Abhängigkeit von der horizontalen Entfernung x vom Austrittsort des Wassers beschreibt.

c) Die untenstehende Grafik zeigt die Verläufe von 3 Wasserstrahlen, die unter gleichem Wasserdruck bei unterschiedlichen Austrittswinkeln entstehen. Lesen Sie die Reichweiten und maximalen Höhen für jede der dargestellten Kurven ungefähr ab. Interpretieren Sie außerdem, wie sich die Höhe und die Reichweite des Strahls verändern, wenn der Austrittswinkel variiert.



Lösungen:

1a) N1(-√2/0), N2(√2/0) 	1b) N1(0/0), N2(4/0) 	1c) N1(-1/0), N2(2/0) 
1d) N(-2/0) 	1e) N1(-0,62/0), N2(1,62/0) 	1f) keine Nullstelle 

2a) S(3/2), keine Nullstelle 	2b) S(1/-4), N1(-1/0), N2(3/0) 
2c) S(-2/-1), N1(-3/0), N2(-1/0) 	2d) S(-2,5/0,75), keine Nullstelle 

3a) $y=1\cdot(x-2)^2-5 \Rightarrow y=x^2-4x-1$
3b) $y=2\cdot(x+4)^2+1 \Rightarrow y=2x^2+16x+33$
3c) $y=3\cdot(x-4)^2+3 \Rightarrow y=3x^2-24x+51$
3d) $y=-2\cdot(x+1)^2-3 \Rightarrow y=-2x^2-4x-5$
4a) $y=1\cdot(x-6)\cdot(x-2) \Rightarrow y=x^2-8x+12$
4b) $y=2\cdot(x+2)\cdot(x-4) \Rightarrow y=2x^2-4x-16$
4c) $y=-1\cdot(x+1)\cdot(x+3) \Rightarrow y=-x^2-4x-3$
4d) $y=3\cdot(x-4)\cdot(x+4) \Rightarrow y=3x^2-48$

5)

a) $h(x) = -0{,}15x^2 + 0{,}9x + 0{,}6$

Die Weite erhält man durch Berechnen der Nullstelle: $h(x) = 0$

Technologieeinsatz: $x \approx 6{,}61$ m

Argumentieren:
Wenn man die Strahlrichtung oder den Wasserdruck (Geschwindigkeit) nicht verändert, so verschiebt sich die Parabel nach oben und es verändert sich der Schnitt mit der vertikalen Achse. Dadurch verändert sich aber auch die Reichweite x, sie wird größer.
Die Diskussion kann auch anders geführt sein. Nicht zwingend in dieser Weise!

b) $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
$h'(x) = 2a \cdot x + b$

Punkte (0|1) und (3|2,5) in $h(x)$ einsetzen;
Maximum bei $x = 3$,
$h'(3) = 0$ einsetzen;
Gleichungssystem: $c = 1$
$2{,}5 = 9a + 3b + 1$
$\underline{0 = 6a + b}$

Gleichungssystem lösen (händisch oder mit Technologie):
$a = -0{,}167,\ \ b = 1,\ \ c = 1$
$h(x) = -0{,}167x^2 + x + 1$

c) **Austrittswinkel 25°:**
Der Strahl trifft bei ca. 4,6 m auf den Boden auf. Die Höhe beträgt maximal ca. 0,5 m. Die Bahn ist flach.
Austrittswinkel 45°:
Die Reichweite ist von den drei betrachteten Fällen am größten, sie liegt bei 6 m, die maximale Höhe beträgt ca. 1,5 m.
Austrittswinkel 65°:
Der Strahl trifft schon bei ca. 4,7 m auf den Boden auf.
Die maximale Höhe beträgt ca. 2,5 m. Die Bahn ist von den drei betrachteten Fällen am steilsten.

Zusammenfassend aus der Zeichnung erkennbar:
Bei den beiden Winkeln, die kleiner oder größer als 45° sind, wird die Reichweite geringer.
Die Höhe wird beim Vergrößern des Winkels größer, beim Verkleinern des Winkels kleiner.